ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 10
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Пример. Для функции $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, найти такую первообразную $F_1(x)$, график которой проходит через точку $M_0(1,\ \ 2)$.

Решение

Совокупность всех первообразных функции $\dfrac{1}{x^2}$ описывается формулой

$$F(x)=-\frac{1}{x}+C.$$

По условию $F_1(1)=2$, т.е. $2=-1+C$, откуда $C=3$. Следовательно,

$$F_1(x)=3-\frac{1}{x}.$$

Упражнения

1. Найти какую-либо первообразную $F(x)$ функции $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x\in(0,\infty)$.

2. Для функции $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\in(-\infty,0)$, первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку $M_0(-2;2)$.

Пример. Найти $\int f(x)dx$, если:

$a)$ $f(x)=e^x+x^2$; $\qquad b)$ $f(x)=-2\sin x+\dfrac{3}{1+x^2}$.

Решение

$a)$ Используя таблицу производных и свойство 3 интеграла, получаем

$$\int(e^x+x^2)dx=e^x+\frac{x^3}{3}+C.$$

$b)$ Так как $(-\cos x)'=\sin x$, $\quad (arctgx)'=\dfrac{1}{1+x^2}$, то

$$\int\left(-2\sin x+\frac{3}{1+x^2}\right)dx=2\cos x+3arctgx+C.$$

Упражнение

Найти интеграл:

$a)\ \int\left(x-2e^{x}\right)dx$; $b)\ \int\frac{\left(\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}\right)^{2}}{x}dx$; $c)\ \int\frac{dx}{x^{4}+4x^{2}}$;

$d)\ \int\frac{\sqrt{x^{2}-3}-3\sqrt{x^{2}+3}}{\sqrt{x^{4}-9}}dx$; $e)\ \int\cos^{2}\frac{x}{2}dx$; e) $f)\ \int tg^{2}xdx$;

$g)\ \int 3^{x}\cdot 5^{2x}dx$.

Примеры

1. $\int(2x+3)^{6}dx=\int(2x+3)^{6}d(2x+3)=\frac{(2x+3)^{7}}{14}+C$.

2. $\int\frac{dx}{(x+a)^{k}}=\begin{cases}\ln|x+a|+C, & k=1,\\ \frac{(x+a)^{-k+1}}{1-k}+C, & k\neq 1.\end{cases}$

3. $\int\frac{xdx}{x^{2}+a}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^{2}+a)}{x^{2}+a}=\frac{1}{2}\ln\left|x^{2}+a\right|+C$.

4. $\int ctgxdx=\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}=\frac{1}{2}\ln|\sin x|+C$.

5. $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^{2}+a}}=\int\frac{d(x^{2}+a)}{2(x^{2}+a)}=\sqrt{x^{2}+a}+C$.

6. $\int\frac{dx}{x^{2}+a^{2}}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^{2}}=\frac{1}{a}arctg\left(\frac{x}{a}\right)+C,\ \ a>0$.

7. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}=\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^{2}}}=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C,\ \ a>0$.

8. $\int\frac{dx}{x^{2}-a^{2}}=\int\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C,\ \ a\neq 0$.

Пример. $J=\int\frac{dx}{\sqrt{x^{2}+a}},\ \ a\neq 0$.

Решение. Пусть $x+\sqrt{x^{2}+a}=t=t(x)$, тогда

$$dt=t'(x)dx=\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^{2}+a}}\right)dx=\frac{t(x)}{\sqrt{x^{2}+a}}dx,$$

откуда

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{dt(x)}{t(x)}.$$

Поэтому

$$J = \int \frac{dt(x)}{t(x)} = \ln|t(x)| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C,$$

т.е.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C.$$

Замечание 5. При вычислении этого интеграла использована **подстановка Эйлера** $x + \sqrt{x^2+a} = t$.

Пример. $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Решение

Так как

$$x(1-x) = -(x^2 - x) = \frac{1}{4} - \left(x^2 - 2\cdot x\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2,$$

то, используя пример 9 при $a = \frac{1}{2}$, получаем

$$J = \int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} = \arcsin\left(\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) + C = \arcsin(2x-1) + C.$$

т.е.

$$J = \arcsin(2x-1) + C.$$

Пример. $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3x + 5}}$.

Решение

Так как

$$x^2 - 3x + 5 = \left(x^2 - 2\cdot x\cdot\frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) + 5 - \frac{9}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4},$$

то, используя пример 11, получаем

$$J = \int \frac{d\left(x - \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}}} = \ln\left|x - \frac{3}{2} + \sqrt{x^2 - 3x + 5}\right| + C.$$

Пример. Вычислить интеграл

$$J=\int\sqrt{a^2-x^2}dx,\quad a>0.$$

Решение

Подынтегральная функция определена на отрезке $[-a,\ a]$. Положим $x=\varphi(t)=a\sin t$, тогда $t=\omega(x)=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$, $\sqrt{\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{x}^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2\cos^2\boldsymbol{t}}=\boldsymbol{a}\cos\boldsymbol{t}$, так как $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$, $a>0$. Следовательно,

$$J=\int a\cos t\cdot\cos tdt=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C.$$

Так как

$$\sin\boldsymbol{t}=\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}},\qquad \cos t=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a},$$

то

$$\frac{1}{2}\cdot\sin 2t=\sin t\cdot\cos t=\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}.$$

Поэтому

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+C.$$

Упражнения

1. Найти интеграл:

$a)$ $\int(3x-5)^{10}dx$; $b)$ $\int x^2\sqrt[5]{5x^3+1}dx$; $c)$ $\int tgxdx$;

$d)$ $\int\frac{dx}{2+\cos^2 x}$, $|x|<\frac{\pi}{2}$; $e)$ $\int\frac{x^7}{\sqrt{1-x^{16}}}dx$; $f)$ $\int\frac{x^2+1}{\sqrt{x^6-7x^4+x^2}}dx$.

2. Найти интеграл:

$a)$ $\int\frac{dx}{2+\sqrt{x}}$; $b)$ $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$, $x>0$; $c)$ $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

3. Найти интеграл:

$a)$ $\int\frac{3x-1}{x^2-x+1}dx$; $b)$ $\int\frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx$.

Примеры

1. $\int x\cos xdx=\int xd(\sin x)=x\sin x-\int\sin xdx=x\sin x+\cos x+C$.

2. Вычислить интеграл

$$J=\int\sqrt{x^2+a}dx.$$

Решение

Полагая $u=\sqrt{x^2+a}, \quad v=x$, по формуле (21) находим

$$J = x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}dx,$$

где

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}dx = \int \frac{x^2+a-a}{\sqrt{x^2+a}}dx = J - a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}.$$

Отсюда получаем уравнение относительно J

$$J = x\sqrt{x^2+a} - J + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}.$$

Используя результат примера 11, находим

$$\int \sqrt{x^2+a}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C.$$

Упражнения

1. Найти интеграл:

$a)$ $\int \frac{dx}{\sin x}$; $\quad b)$ $\int \ln x dx$; $\quad c)$ $\int x\sin x dx$.

2. Найти интеграл:

$a)$ $\int x^2 e^x dx$; $\quad b)$ $\int \arccos^2 x dx$.

Пример. Если функция маржинального продукта имеет вид $MP(L)=3(3L+2)$, то найдите функцию общего продукта. Воспользуемся формулой (14) и имеем:

$$Q(L) = \int MP(L)dL = 3\int(3L+2)dL = \frac{9}{2}L^2 + 6L + C.$$

Пример. Если функция маржинального продукта имеет вид $MP(L)=4\sin 2L$, то найдите функцию общего продукта. Здесь $L=0 \Rightarrow Q=0$. Воспользуемся формулой (5.14) и имеем:

$$Q(L) = 4\int \sin 2L dL = -2\cos 2L + C.$$

Здесь $L=0 \Rightarrow C=2$. Тогда $Q(L) = -2\cos 2L + 2$.

Пример. Если функция маржинального продукта имеет вид $MP(L)=4\cos 2L$, то найдите функцию общего продукта. Здесь $L=0 \Rightarrow Q=3$. Воспользуемся формулой (5.14) и имеем:

$$Q(L) = 4\int \cos 2L dL = 2\sin 2L + C.$$

Здесь $L=0 \Rightarrow C=3$. Тогда $Q(L) = 2\sin 2L + 3$.

Упражнения

а) Если функция маржинального продукта имеет вид $MP(L)=3L\sin 2L$, то найдите функцию общего продукта.

b) Если функция маржинального продукта имеет вид $MP(L) = 5L^2 \sin 2L$, то найдите функцию общего продукта. Здесь $L = 0 \Rightarrow Q = 0$.

c) Если функция маржинального продукта имеет вид $MP(L) = 4L \ln 3L$, то найдите функцию общего продукта. Здесь $L = 0 \Rightarrow Q = 2$.

Пример. Вычислить $\int \left(x^3 + 2x^2 + 5\right) e^x dx$.

Решение

Если вычислить этот интеграл с помощью трехкратного интегрирования по частям, то получим:

$$\int \left(x^3 + 2x^2 + 5\right) e^x dx = \left(x^3 - x^2 + 2x + 3\right) e^x + C.$$

Этот ответ имеет ту же структуру, что и подынтегральная функция, т.е. является (с точностью до произвольной постоянной) произведением многочлена третьей степени на показательную функцию e^x. Поэтому первообразную можно было сразу искать в следующем виде:

$$\int \left(x^3 + 2x^2 + 5\right) e^x dx = \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right) e^x + E, \qquad (1)$$

где E - произвольная постоянная.

Чтобы найти неопределенные коэффициенты $A, B, C, D,$ продифференцируем обе части равенства (1), учитывая при этом что производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(x^3 + 2x^2 + 5\right)e^x = \left(3A^2 + 2Bx + C\right)e^x + \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right)e^x$$

Разделив обе части этого равенства на e^x, получим:

$$x^3 + 2x^2 + 5 = 3Ax^2 + 2B + C + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

откуда

$$x^3 + 2x^2 + 5 = Ax^3 + \left(3A + B\right)x^2 + \left(2B + C\right)x + \left(C + D\right). \qquad (2)$$

Воспользуемся теперь тем, что два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую степень и равны их коэффициенты при одинаковых степенях переменной. Сравнив в тождестве (2) коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, получим:

$$\begin{array}{r|l} x^3 & A = 1 \\ x^2 & 3A + B = 2, \\ x^1 & 2B + C = 0 \\ x^0 & C + D = 5. \end{array}$$

Мы получили систему из четырех уравнений с четырьмя переменными A, B, C, D.

Решая ее, находим: $A = 1$, $B = -1$, $C = 2$, $D = 3$.

Таким образом,

$$\int \left(x^3 + 2x^2 + 5\right)e^x dx = \left(x^3 - x^2 + 2x + 3\right)e^x + E.$$

Пример. Вычислить $\int e^{3x} \sin 2x\, dx$.

Решение

Здесь подынтегральная функция является произведением показательной функции и синуса. В этом случае ее первообразная равна произведению показательной функции и линейной комбинации синуса и косинуса того же аргумента:

$$\int e^{3x}\sin 2x\,dx = e^{3x}\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right) + C. \qquad (3)$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов A и B продифференцируем обе части равенства (3):

$$e^{3x}\sin 2x = 3e^{3x}\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right) + e^{3x}\left(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x\right).$$

Разделим обе части этого равенства на e^{3x}:

$$\sin 2x = 3A\cos 2x + 3B\sin 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x.$$

Далее имеем:

$$\sin 2x = (3B - 2A)\sin 2x + (3A + 2B)\cos 2x.$$

Полученное равенство справедливо для любых значений x.Это имеет место тогда, когда равны коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$ в левой и правой частях равенства. Приравняв друг другу указанные коэффициенты, получим:

$$\begin{array}{r|l} \sin 2x & 3B - 2A = 1, \\ \cos 2x & 3A + 2B = 0. \end{array}$$

Из этой системы двух уравнений с двумя переменными A и B находим: $A = -\dfrac{2}{13}$, $B = \dfrac{3}{13}$. Значит

$$\int e^{3x}\sin 2x\,dx = e^{3x}\left(-\frac{2}{13}\cos 2x + \frac{3}{13}\sin 2x\right) + C = \frac{1}{13}e^{3x}\left(3\sin 2x - 2\cos 2x\right) + C.$$

Упражнения

Используясь методом неопределенных коэффициентов, вычислите следующие интегралы:

1. $\int \left(3x^2 + 2x - 1\right)e^{2x}\,dx$ **2.** $\int e^{-x}\cos 3x\,dx$

3. $\int \left(5x^2 - 8x + 2\right)e^{-x}dx$ **4.** $\int (x + 8)\sin 2x\,dx$

Интегралы от дробей 1-го рода вычисляются непосредственно

1) $$\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x - a| + C;$$

2) $$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int (x-a)^{-n}dx = A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C\,(n = 2, 3, 4, \ldots).$$

Упражнения

Вычислите следующие интегралы от простейших дробей.

1. $\int \dfrac{dx}{6x^2 + x + 2}$. **2.** $\int \dfrac{5x + 3}{\left(x^2 + 2\right)^2}dx$.

3. $\int \dfrac{dx}{(2x + 3)^3}$. **4.** $\int \dfrac{3x + 2}{x^2 - 3x + 8}\,dx$.

5. $\int \frac{2x-7}{\left(x^2+4x+15\right)^2}\,dx$.

Пример. Вычислить $\int \frac{6x+1}{x^2+2x-3}dx$.

Решение

Разложим знаменатель подынтегральной функции на множители:

$$x^2+2x-3=(x-1)(x+3).$$

Выпишем подынтегральную функцию и представим ее в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{6x+1}{(x-1)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}.$$

Освободившись в этом равенстве от знаменателей, получим:

$$6x+1=A(x+3)+B(x-1). \qquad (2)$$

Для отыскания коэффициентов воспользуемся методом подстановки частных значений. Для нахождения коэффициента A положим $x=1$. Тогда из равенства (2) получим $7=4A$, откуда $A=\frac{7}{4}$. Для отыскания коэффициента B положим $x=-3$. Тогда из равенства (2) получим $-17=-4B$, откуда $B=\frac{17}{4}$.

$$\frac{6x+1}{(x-1)(x+3)}=\frac{\frac{7}{4}}{x-1}+\frac{\frac{17}{4}}{x+3}.$$

Значит,

$$\int\frac{6x+1}{x^3+2x-3}dx=\frac{7}{4}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{17}{4}\int\frac{dx}{x+3}=\frac{7}{4}\ln|x-1|+\frac{17}{4}\ln|x+3|+C.$$

Пример. Вычислим $\int \frac{x^4+2x^2+8x+5}{\left(x^2+2\right)(x-1)^2(x+2)}dx$.

Решение

Выпишем подынтегральную функцию и представим ее в виде суммы простейших дробей. В знаменателе содержится множитель x^2+2, не имеющий действительных корней, ему соответствует дробь 2-го рода:

$$\frac{Ax+B}{x^2+2},$$

множителю $(x-1)^2$ соответствует одна дробь 1-го рода $\frac{E}{x+2}$. Таким образом, подынтегральную функцию мы представим в виде суммы четырех дробей:

$$\frac{x^4+2x^2+8x+5}{(x^2+2)(x-1)^2(x+2)}=\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}+\frac{E}{x+2}. \qquad (3)$$

Освободимся в этом равенстве от знаменателей. Получим:

$$x^4+2x^2+8x+5=(Ax+B)(x-1)^2(x+2)+C(x^2+2)$$
$$(x+2)+D(x^2+2)(x-1)(x+2)+E(x^2+2)(x-1)^2 \qquad (4)$$

Знаменатель подынтегральной функции имеет два действительных корня $x=1, x=-2$. При подстановке в равенство (4) значения $x=1$ получаем$16=9C$, откуда находим $C=\frac{16}{9}$. при подстановки $x=-2$ получаем $13=54E$ и соответственно определяем $E=\frac{13}{54}$. Подстановка значения $x=i\sqrt{2}$ (корня многочлена x^2+2) позволяет перейти к равенству

$$4-4+8i\sqrt{2}+5=(Ai\sqrt{2}+B)(i\sqrt{2}-1)^2(i\sqrt{2}+2).$$

Оно преобразуется к виду:

$$(10A+2B)+(2A-5B)\sqrt{2}\,i=5+8\sqrt{2}\,i,$$

откуда $10A+2B=5$, а $(2A-5B)\sqrt{2}=8\sqrt{2}$.

Решив систему двух уравнений с двумя переменными

$$\begin{cases}10A+2B=5, \\ 2A-5B=6,\end{cases}$$

находим: $A=\frac{41}{54}, B=-\frac{35}{27}$.

Осталось определить значение коэффициента D. Для этого в равенстве (4) раскроем скобки, приведем подобные члены, а затем сравним коэффициенты при x^4. Получим :

$$A+D+E=1, \text{ т.е. } D=0.$$

Подставим найденные значения коэффициентов в равенство (3) :

$$\frac{x^4+2x^2+8x+5}{(x^2+2)(x-1)^2(x+2)}=\frac{\frac{41}{54}x-\frac{35}{27}}{x^2+2}+\frac{\frac{16}{9}}{(x-1)^2}+\frac{\frac{13}{54}}{x+2}$$

а затем перейдем к интегрированию:

$$\int\frac{x^4+2x^2+8x+5}{(x^2+2)(x-1)^2(x+2)}dx=\frac{41}{54}\int\frac{x\,dx}{x^2+2}-\frac{35}{27}\int\frac{dx}{x^2+2}+$$
$$+\frac{16}{9}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{13}{54}\int\frac{dx}{x+2}=\frac{41}{108}\ln(x^2+2)-\frac{35}{27\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}-$$
$$-\frac{16}{9(x-1)}+\frac{13}{54}\ln|x+2|+C.$$

Упражнения

Вычислите следующие интегралы от правильных дробей.

1. $\int \frac{x^2+2}{x^3+x^2-2x}\,dx$.

2. $\int \frac{3x-2}{(x+1)(x^2-9)}\,dx$.

3. $\int \frac{x^2\,dx}{(x+1)(x+3)^2}$.

4. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+1)}$.

5. $\int \frac{x\,dx}{x^3+1}$.

6. $\int \frac{2x-1}{(x^2+2)(x^2+4)}\,dx$

Пример. Вычислить $\int \frac{x^4-4x^3+x^2+16x-11}{(x-1)(x+2)(x-3)}dx$.

Решение

Имеем:

$$g(x)=(x-1)(x+2)(x-3)=x^3-2x^2-5x+6,$$

$$f(x)=x^4-4x^3+x^2+16x-11.$$

Для выделения целой части разделим $f(x)$ на $g(x)$:

$$\begin{array}{r|l} x^4-4x^3+x^2+16x-11 & \\ -\;\; x^4-2x^3-5x+6x & x^3-2x^2-5x+6 \\ \hline -2x^3+6x^2+10x-11 & x-2 \\ -\;\; -2x^3+4x^2+10x-12 & \\ \hline 2x^2 \quad + \quad 1 & \end{array}$$

Итак,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=x-2+\frac{2x^2+1}{x^2-2x^2-5x+6}.$$

Значит,

$$\int\frac{x^4-4x^3+x^2+16x-11}{(x-1)(x+2)(x-3)}dx=\int(x-2)+dx+\int\frac{2x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-3)}dx.$$

Имеем:

$$\int(x-2)dx=\frac{x^2}{2}-2x+C_1.$$

Для вычисления интеграла $\int\frac{2x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-3)}dx$ применяется, как и выше, метод неопределенных коэффициентов. После вычислений, которые мы оставляем читателю, получаем:

$$\int\frac{x^4-4x^3+x^2+16-11}{(x-1)(x+2)(x-3)}dx=\frac{x^2}{2}-2x-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{3}{5}\ln|x+2|+\frac{19}{10}\ln|x-3|+C.$$

Упражнения

Вычислите следующие интегралы от неправильных дробей.

1. $\int \frac{x^5+x-1}{x-2}dx$. **2.** $\int \frac{x^4+2}{x^3-x}dx$.

3. $\int \frac{x^3+4}{x^2-6x+8}dx$. **4.** $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$

Пример. Вычислить $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}}$.

Решение

Учитывая, что под корнем содержится дробно–линейно выражение, воспользуемся подстановкой

$$\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}=t, \text{ откуда } x=\frac{t^4+2}{t^4-1}.$$

Выразим все компоненты подынтегрального выражения через t.

$$x-1=\frac{t^4+2}{t^4-1}-1=\frac{3}{t^4-1};\; x+2=\frac{t^4+2}{t^4-1}+2=\frac{3t^4}{t^4-1};$$

$$dx=\left(\frac{t^4+2}{t^4-1}\right)' dt=-\frac{12t^3}{\left(t^4-1\right)^2}dt.$$

Заменив под знаком интеграла переменную x новой переменной t, получим:

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}}=\int \frac{-\frac{12t^3}{\left(t^4-1\right)^2}dt}{\frac{3}{t^4-1}\cdot\frac{3t^4}{t^4-1}\cdot t}=-\frac{4}{3}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{4}{3t}+C=\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+C.$$

Пример. Вычислить $I=\int \frac{1+7\sqrt[3]{\frac{5x-1}{7}}-5x}{\sqrt[6]{\frac{5x-1}{7}}+\sqrt[3]{\frac{5x-1}{7}}+\sqrt{\frac{5x-1}{7}}}dx$.

Решение

В данном случае под знаком интеграла содержатся корни с разными показателями, но с одним и тем же подкоренным выражением. Наименьшее общее кратное всех показателей корней, входящих в состав подынтегрального выражения, равно 6, поэтому данный интеграл от иррациональной функции может быть рационалиризован с помощью подстановки:

$$\sqrt[6]{\frac{5x-1}{7}}=t,\; x=\frac{7t^6+1}{5}.$$

Тогда

$$dx = \frac{42}{5} t^5 dt, \quad \sqrt{\frac{5x-1}{7}} = t^3, \quad \sqrt[3]{\frac{5x-1}{7}} = t^2.$$

Заменив переменную под знаком интеграла, получим:

$$I = \int \frac{1+7t^2-\left(7t^6+1\right)}{t+t^2+t^3} \cdot \frac{42}{5} t^2 dt = -\frac{294}{5} \int \frac{t^{10}-t^6}{t^2+t+1} dt.$$

Под знаком интеграла содержится неправильная рациональная дробь. Для выделения целой части разделим числитель на знаменатель так, как это было сделано ранее.

Получаем:

$$\frac{t^{10}-t^6}{t^2+t+1} = t^8 - t^7 + t^5 - 2t^4 + t^3 + t^2 - 2t + 1 + \frac{t-1}{t^2+t+1}.$$

Поэтому

$$I = -\frac{294}{5} \int \left(t^8 - t^7 + t^5 - 2t^4 + t^3 + t^2 - 2t + 1 + \frac{t-1}{t^2+t+1} \right) dt =$$

$$= -\frac{294}{5} \left(\frac{t^9}{9} - \frac{t^9}{8} + \frac{t^6}{6} - \frac{2t^5}{5} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} - t^2 + t + \int \frac{t-1}{t^2+t+1} dt \right).$$

Для вычисления $\int \frac{t-1}{t^2+t+1} dt$ выделим в знаменателя полный квадрат аналогично тому, как это было сделано в предыдущем примере. Получим:

$$\int \frac{t-1}{t^2+t+1} dt = \frac{1}{2} \ln \left(t^2+t+1\right) - \sqrt{3} arctg \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Окончательно находим:

$$I = -\frac{294}{5} \left(\frac{t^9}{9} - \frac{t^8}{8} + \frac{t^6}{6} - \frac{2t^5}{5} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} - t^2 + t + \frac{1}{2} \ln\left(t^2+t+1\right) - \sqrt{3} arctg \frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right) + C,$$

где $t = \sqrt[6]{\frac{5x-1}{7}}$.

Упражнения

Вычислите следующие интегралы от иррациональных функций.

1. $\int \frac{\sqrt{4+x}}{x} dx$.

2. $\int x\sqrt{1+x}\, dx$.

3. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)} dx$.

4. $\int \frac{1-2\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}} dx$.

5. $\int \frac{1}{(2-x)^2} \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\, dx$.

6. $\int \frac{\sqrt[6]{2x-1}+1}{(2x-1)\left(\sqrt[3]{2x-1}-1\right)} dx$

Пример. Вычислить $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$.

Решение

В данном случае имеем:

$$R\left(-\sin x, \cos x\right) = -\left(-\sin x\right)^3 \cos^2 x = -\sin^3 x \cos^2 x.$$

Воспользуемся подстановкой $\cos x = t$.Заметим, что

$$\sin^3 x \cos^2 x\, dx = \sin^2 x \cos^2 x \sin x\, dx = -\left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 x$$

$$\left(-\sin x\, dx\right) = -\left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 x\, d\left(\cos x\right).$$

Значит,

$$\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx = -\int \left(1-t^2\right) t^2 dt = \int \left(t^4 - t^2\right) dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

Пример. Вычислим $\int \frac{\cos^3 x\, dx}{1+\sin^2 x}$.

Решение

В данном случае имеем:

$$R\left(\sin x, -\cos x\right) = \frac{\left(-\cos x\right)^3}{1+\sin^2 x} = -\frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x} = -R\left(\sin x, \cos x\right).$$

Воспользуемся подстановкой $\sin x = t$:

$$\int \frac{\cos^3 x\, dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}\cos x\, dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{1+\sin^2 x} d\left(\sin x\right) =$$

$$= \int \frac{1-t^2}{1+t^2} dt = \int \left(\frac{2}{1+t^2} - 1\right) dt = 2\, arctg\, t - t + C =$$

$$= 2\, arctg\left(\sin x\right) - \sin x + C\,.$$

Пример. Вычислить $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$.

Решение

В данном случае имеем:

$$R\left(-\sin x, -\cos x\right) = R\left(\sin x, \cos x\right),$$

Значит, в качестве рационализирующей может выступить одна из двух подстановок $tg\, x = t$ или $ctg\, x = t$. Имеем:

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx = \int ctg^2 x \frac{dx}{\sin^2 x}.$$

В данном случае целесообразно сделать подстановку $ctg\ x = t$

Тогда $dt = -\frac{dx}{\sin^2 x}$ и, следовательно,

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx = -\int t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{1}{3} ctg^3 x + C\,.$$

Пример. Вычислим $\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx$.

Решение

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx = \int \left(\sin^2 x \cos^2 x\right) \cos^2 x\, dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int \sin^2 2x \cos^2 x\, dx = \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{6} \int \left(1 - \cos 4x + \cos 2x - \cos 4x \cos 2x\right) dx = \frac{1}{16}\left(x - \frac{\sin 4x}{4} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin 2x}{2} - \int \frac{\cos 6x + \cos 2x}{2} \right) = \frac{1}{16}\left(x - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 2x}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 2x}{2} \right) \right) + C = \frac{1}{16}\left(x + \frac{1}{4}\sin 2x - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{12}\sin 6x \right) + C \;.$$

Пример. Вычислим $\int \sin x \sin 3x \sin 5x\, dx$.

Решение

Несколько раз воспользуемся формулами преобразования произведения в сумму:

$$\int \sin x \sin 3x \sin 5x\, dx = \frac{1}{2} \int \left(\cos 2x - \cos 4x\right) \sin 5x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 2x \sin 5x\, dx - \frac{1}{2}\int \cos 4x \sin 5x\, dx = \frac{1}{4}\int \left(\sin 7x + \right.$$

$$\left. + \sin 3x\, \right) dx - \frac{1}{4}\int \left(\sin 9x + \sin\right) dx = \frac{1}{4}\left(-\frac{\cos 7x}{7} - \frac{\cos 3x}{3} \right) -$$

$$- \frac{1}{4}\left(-\frac{\cos 9x}{9} - \cos x \right) + C = \frac{7\cos 9x + 63\cos x - 9\cos 7x - 21\cos 3x}{252} + C\,.$$

Упражнения

Вычислите следующие интегралы от тригонометрических функций.

1. $\int tg^5 x\,dx$.

3. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^7} dx$

5. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx$

7. $\int tg^4 x\,dx$.

2. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$.

4. $\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}$.

6. $\int \sin^5 x \cos^4 x\,dx$.

8. $\int \frac{dx}{\cos^5 x}$.

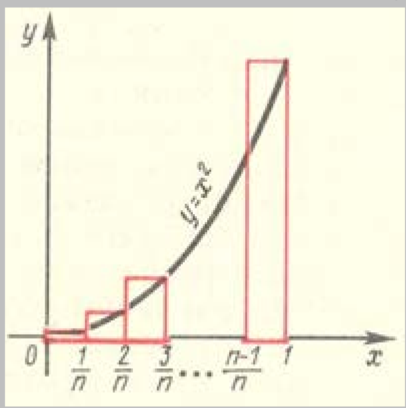
9. $\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin x} dx$.

11. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx$.

10. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$.

12. $\int \cos^8 x\,dx$.

Пример (Архимеда). Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямыми $x=0$, $x=1$, $y=0$.



Решение

Разделим отрезок [0, 1] на n равных частей точками

$$x_0 = 0,\quad x_1 = \frac{1}{n},\quad x_2 = \frac{2}{n},\quad \ldots\quad , x_{n-1} = \frac{n-1}{n},\quad x_n = \frac{n}{n} = 1.$$

Тогда

$$f(x_0) = 1,\quad f(x_1) = \frac{1^2}{n^2},\quad f(x_2) = \frac{2^2}{n^2},\quad \ldots\quad , f(x_{n-1}) = \frac{(n-1)^2}{n^2},\quad f(x_n) = \frac{n^2}{n^2} = 1.$$

Составим сумму $\boldsymbol{S_n}$ (площадь ступенчатой фигуры на рис. 6):

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \frac{3^2}{n^2} + \cdots + \frac{n^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right).$$

Методом математической индукции можно доказать, что

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Значит,

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+\frac{3^2}{n^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^2}\right)=\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2n^2+3n+1}{6n^2},$$

откуда

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{6n^2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Заметим, что этот результат был получен еще Архимедом с помощью предельного перехода.

Пример. Приведем пример, показывающий, что существуют неинтегрируемые функции. Напомним, что функцией Дирихле называют функцию $\boldsymbol{D(x)}$, определяемую на отрезке [0, 1] равенствами

$$D(x)=\begin{cases}1, & \textit{если} \quad x - \textit{рациональное число},\\ 0, & \textit{если} \quad x - \textit{иррациональное число}.\end{cases}$$

Какой бы отрезок $[x_k,\ x_{k+1}]$ мы ни взяли, на нем найдутся как рациональные, так и иррациональные точки, т. е. точки, где $D(x)=0$, и точки, где $D(x)=1$. Поэтому для любого разбиения отрезка [0, 1] все значения m_k равны нулю, а все значения M_k равны единице. Тогда все нижние суммы Дарбу $s_T=\sum_{k=0}^{n-1}m_k\Delta x_k$ равны нулю, а все верхние суммы Дарбу $S_T=\sum_{k=0}^{n-1}M_k\Delta x_k$ равны единице, поскольку

$$s_T=\sum_{k=0}^{n-1}m_k\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}0\cdot\Delta x_k=0, \qquad S_T=\sum_{k=0}^{n-1}M_k\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}1\cdot\Delta x_k=1$$

а $\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k$ длина отрезка [0, 1]. Итак, в рассматриваемом случае $\mathfrak{M}=\{0\}$, $\mathcal{N}=\{1\}$ и любое число из промежутка [0, 1] разделяет множества $\mathfrak{M}$ и $\mathcal{N}$. Значит, функция Дирихле **не является интегрируемой на отрезке** [0, 1]

Пример. Показать

$$\int_a^b dx = b-a,$$

пользуясь определением интеграла и теоремой о том, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Решение

Функция $f(x)=1$ непрерывна на отрезке и в силу теоремы 2 интегрируема. Пусть $T=\{x_i,\ i=0,1,...,n\}$ - произвольное разбиение отрезка $[a,\ b]$. Так как $f(x)=1$, то для любого разбиения отрезка $[a,\ b]$ все значения m_k равны единице , а все значения M_k также равны единице. Тогда все нижние суммы Дарбу

$s_T = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k$ равны 1, а все верхние суммы Дарбу $S_T = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k$ равны 1, поскольку

$$s_T = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} 1 \cdot \Delta x_k = b - a, \quad S_T = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} 1 \cdot \Delta x_k = b - a$$

а $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k$ длина отрезка $[a,\ b]$. Итак, в рассматриваемом случае $\mathsf{M} = \{b - a\}$, $\mathsf{N} = \{b - a\}$. Тогда

$$b - a = s_T = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \le I \le \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k = S_T = b - a,$$

и поэтому $I = \int_a^b dx = b - a$.

Упражнение

Показать

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2},$$

пользуясь определением интеграла и теоремой о том, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Пример. Переменные издержки производства определяются формулой $y = 3x$, где x - количество произведенных единиц продукции. Рассчитать средние издержки производства, если объем производства составляет от 3 до 5 единиц.

Решение

Среднее значение функции есть $\frac{1}{5-3} \cdot \int_3^5 3x dx = \frac{3}{2} \int_3^5 x dx = 12$. Поскольку $y = 3x$, имеем:

$$12 = 3x_0, \text{ откуда } x_0 = 4.$$

Средние издержки производства составляют 12.

Упражнение

Найти среднее значение издержек $K(x) = 3x^2 + 4x + 1$, если объем продукции x меняется от 3 до 3 единиц, и указать объем продукции, при котором издержки принимают среднее значение.

Пример. Функция $\frac{x^3}{3}$ - одна из первообразных для функции x^2. Поэтому

$$\int_a^b x^2dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Пример. Вычислить $\int_{-2}^{1}(2x^3+3x-4)dx$.

Решение

Имеем

$$\int_{-2}^{1}(2x^3+3x-4)dx = \int_{-2}^{1}2x^3dx + \int_{-2}^{1}3xdx + \int_{-2}^{1}(-4)dx = 3\int_{-2}^{1}x^3dx + 3\int_{-2}^{1}xdx - 4\int_{-2}^{1}dx =$$

$$= 2\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_{-2}^{1} + 3\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-2}^{1} - 4\cdot x\Big|_{-2}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left((1^4-(-2)^4) + \frac{3}{2}(1^2-(-2)^2) - 4(1-(-2)\right) = -24.$$

Упражнения

1. Вычислить интегралы:

а) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xdx$; в) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$; г) $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

2. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & при \quad 0 \le x \le 1, \\ \sqrt{x} & при \quad 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Вычислить $\int_0^2 f(x)dx$.

3. Вычислить интеграл $\int_0^2|1-x|dx$.

4. Вычислить интеграл $\int_a^b\frac{|x|}{x}dx$, где $a<b$.

Пример. Вычислить $\int_1^2 xe^xdx$.

Решение. Положим $u = x, \quad dv = e^xdx$. Тогда $du = dx, \quad v = e^x$. Используя формулу (7), получим

$$\int_1^2 xe^xdx = xe^x\Big|_1^2 - \int_1^2 e^xdx = 2\cdot e^2 - 1\cdot e^1 - e^x\Big|_1^2 = 2e^2 - e - (e^2 - e) = e^2.$$

Упражнения

1. Показать, что для любых $m \in N$, $n \in N$ справедливы равенства

а) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx dx = 0;$ б) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi.$

2. Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{b}} e^{ax} \sin bx\, dx$.

3. Вычислить интеграл $\int\limits_{1}^{e} \ln^3 x dx$.

4. Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x}\, dx$.

5. Вычислить интеграл $\int e^x \arcsin e^{-x}\, dx$.

Пример. Вычислить $\int\limits_{0}^{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

Решение

Воспользуемся тригонометрической подстановкой $x = \varphi(t) = a\sin t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$. Найдем пределы интегрирования α и β для новой переменной $\boldsymbol{t}$.

Функция $\varphi(t) = a\sin t$ на отрезке $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ определена и дифференцируема внутри него, причем $\varphi(0) = 0$, $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = a$ и $\varphi\left(\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]\right) = [0,\ a]$. Значит, можно применить формулу (8). Имеем

$$\int\limits_{0}^{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2 t} \cdot a\cos t dt = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} a\cos t \cdot a\cos t dt = a^2 \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

$$= a^2 \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = = a^2 \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{a^2}{2} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt = \frac{a^2}{2} t \Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{a^2}{2} \frac{\sin 2t}{2} \Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + \frac{a^2}{4}(\sin\pi - \sin 0) = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Упражнение

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,\ -a]$. Показать, что:

а) если f - нечетная функция, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x) dx = 0;$

б) если f - четная функция, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x) dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x) dx /$

Пример. Вычислить $\int\limits_{0,5}^{1,5} \frac{dx}{4x^2-4x+5}$.

Решение

Так как $4x^2-4x+5=(2x-1)^2+4$. Положим $u=2x-1$; тогда $du=2dx$. Если $x=0{,}5$, то $u=2x-1=2\cdot 0{,}5-1=0$; если $x=1{,}5$, то $u=2x-1=2\cdot 1{,}5-1=2$. Таким образом, 0 и 2 - новые пределы интегрирования. Функция $u=2x-1$ на отрезке $[0{,}5,\ 1{,}5]$ определена, дифференцируема и монотонно возрастает; значит, можно воспользоваться формулой (8) (но если в предыдущем примере мы использовали эту формулу «слева направо», то теперь будем идти «справа налево»). Получаем

$$\int\limits_{0,5}^{1,5} \frac{dx}{4x^2-4x+5} = \int\limits_{0,5}^{1,5} \frac{2dx}{(2x-1)^2+4} = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} \frac{du}{u^2+4} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} arctg\left(\frac{u}{2}\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{4}(arctg1 - arctg0) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}-0\right) = \frac{\pi}{16}.$$

Упражнения

1. Показать, что если f - непрерывна на отрезке R^1 периодическая с периодом T функция, то для любого $\alpha \in R^1$ справедливо равенство

$$\int\limits_{a}^{a+T} f(x)dx = \int\limits_{a}^{T} f(x)dx.$$

2. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\, dx$; б) $\int\limits_{0}^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\, dx$.

3. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\, dx$; б) $\int\limits_{2}^{4} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} dx$.